Une approche de modélisation des écoulements multiphasiques

J.-M. Hérard [*]

[*] EDF Lab Chatou, MFEE - France.
jean-marc.herard@edf.fr

GdR MaNu 15-10-20

Outline

Introduction

L'approche de modélisation des écoulements de fluides implique plusieurs étapes, que l'on peut schématiquement résumer comme suit:

- Construction d'un modèle souche EDP invoquant les grands principes de modélisation : invariance Galiléenne ; objectivité ; respect du second principe ; structuration en lois de conservation / relations saut ; lois de fermeture...) ;
- Analyse du modèle (existence/unicité de solutions ; problème de Riemann ; respect a priori de l'espace des états ; effets de relaxation ; consistance modèle avec experiences élémentaires...);
- Construction de schémas d'approximation ;
- Analyse numérique des schémas et vérification des schémas (confrontation de solutions exactes vs approximations discrètes obtenues via schémas) ;
- Validation des modèles (confrontation des solutions approchées sur maillage "convergé" à la réalité expérimentale).

On se concentre ici sur le premier point de **modélisation**.

Introduction

L'approche de modélisation des écoulements de fluides implique plusieurs étapes, que l'on peut schématiquement résumer comme suit:

- Construction d'un modèle souche EDP invoquant les grands principes de modélisation : invariance Galiléenne ; objectivité ; respect du second principe ; structuration en lois de conservation / relations saut ; lois de fermeture...) ;
- Analyse du modèle (existence/unicité de solutions ; problème de Riemann ; respect a priori de l'espace des états ; effets de relaxation ; consistance modèle avec experiences élémentaires...);
- Construction de schémas d'approximation ;
- Analyse numérique des schémas et vérification des schémas (confrontation de solutions exactes vs approximations discrètes obtenues via schémas) ;
- Validation des modèles (confrontation des solutions approchées sur maillage "convergé" à la réalité expérimentale).

On se concentre ici sur le premier point de **modélisation**.

Contexte

Objectif principal :

Modéliser les écoulements **multiphasiques** à phases (faiblement ou non) compressibles, et **immiscibles** ou **hybrides**

- Pour des applications très instationnaires,
- Incluant l'apparition d'ondes de choc,
- En présence de constituants munis de lois d'état thermodynamique complexes,
- Vérifiant une inégalité d'entropie physique.

Question : Peut on représenter de tels écoulements avec des modèles EDP ?
Trois exemples typiques :

- la simulation d'un composant unique présent sous deux phases (l,v) [P1],
- les configurations impliquant un fort transfert énergétique entre un métal chaud et un second composant intialement froid (eau) [P5,P21],
- la simulation de situations hybrides où un métal chaud rencontre un composant "eau", en présence de gaz de fission [P24,P26].

Un modèle diphasique pour application en eau-vapeur [P1]

Dans le cadre des écoulements de fluides en configuration diphasique à phases immiscibles, le modèle EDP suivant permet de vérifier le CdC ci-dessus. En notant la variable d'état W, on considère:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + V_\Sigma \partial_x(\alpha_k) = \kappa_k(W) \\ \partial_t(m_k) + \partial_x(m_k U_k) = \Gamma_k(W) \\ \partial_t(m_k U_k) + \partial_x\left(m_k U_k^2 + \alpha_k P_k\right) - \Pi(W)\partial_x(\alpha_k) = I_k(W) + (U_1 + U_2)\Gamma_k(W)/2 \\ \partial_t(\alpha_k E_k) + \partial_x(\alpha_k U_k(E_k + P_k)) + \Pi(W)\partial_t(\alpha_k) = \Psi_k(W) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ... + (U_1 + U_2) I_k(W)/2 + \Gamma_k(W) U_1 U_2 / 2 \end{array}\right.$$

où les variables $\alpha_k, \rho_k, U_k, P_k$ et $E_k = \rho_k(\epsilon_k(P_k, \rho_k) + U_k^2/2)$ désignent :

- α_k: le taux de présence statistique de phase k (avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$), dans le cadre non miscible,
- ρ_k: la masse volumique de phase k,
- U_k : la vitesse moyenne de phase k,
- P_k : la pression moyenne de phase k,
- E_k : l'énergie totale moyenne de phase k,

et en introduisant les masses partielles : $m_k = \alpha_k \rho_k$.

Remarque préalable: un modèle diphasique admissible-2

Les contributions :

$$\Gamma_k(W), I_k(W), \Psi_k(W),$$

représentent les transferts de masse, dynamique, et énergie entre les deux phases $k = 1, 2$, s'annulant par sommation sur l'indice des phases.

Le couple $(V_\Sigma, \Pi(W))$ est défini par:

$$V_\Sigma = \beta(W)U_1 + (1 - \beta(W))U_2$$

et:

$$\Pi(W) = \gamma(W)P_1 + (1 - \gamma(W))P_2$$

avec la relation suivante :

$$\gamma(W) = \frac{(1 - \beta(W))/T_1}{(1 - \beta(W))/T_1 + \beta(W)/T_2}$$

sachant que T_k désigne la température de phase k:

$$1/T_k = \partial_{P_k}(S_k)/\partial_{P_k}(\epsilon_k)$$

Remarque:
Le principe d'invariance Galiléenne n'impose pas de contrainte sur $\beta(W)$.

Remarque préalable: un modèle diphasique admissible-3

Les termes de transfert entre phases sont définis de la manière suivante:

$$\begin{cases} \Gamma_k(W) = (-1)^k \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} T_0/\mu_0(\mu_1/T_1 - \mu_2/T_2)/\tau_M(W) \\ I_k(W) = (-1)^k \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(U_1 - U_2)/\tau_U(W) \\ \Psi_k(W) = (-1)^k \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} e_0/T_0(T_1 - T_2)/\tau_T(W) \\ \kappa_k(W) = (-1)^k \alpha_1\alpha_2(P_2 - P_1)/\pi_0/\tau_P(W) \end{cases}$$

où μ_k est le potentiel de Gibbs de phase k :

$$\mu_k = \epsilon_k(P_k, \rho_k) + \frac{P_k}{\rho_k} - T_k S_k$$

Il reste à préciser à ce stade la forme exacte des échelles de temps de relaxation $\tau_M(W), \tau_U(W), \tau_P(W), \tau_T(W)$.

Objectif principal et cahier des charges

Question: Construction de modèles aptes à la représentation d'écoulements triphasiques ?

Contraintes pour le modèle EDP multiphasique ($k > 2$): pour pouvoir calculer les ondes de pression et évaluer l'impact de celles-ci sur les structures, il faudra

- Avoir une caractérisation entropique du modèle EDP dans la limite non visqueuse (E),
- Savoir décrire les ondes de choc associées au modèle considéré (RH),
- Disposer d'un modèle au premier ordre à structure hyperbolique (H)
- Assurer le respect des bornes (densité positive, énergie interne positive) pour les variables/solutions (au moins régulières...!) du domaine thermodynamique admissible (P);
- Possible symétrisation (S) .

Objectif principal et cahier des charges

Question: Construction de modèles aptes à la représentation d'écoulements triphasiques ?

Contraintes pour le modèle EDP multiphasique ($k > 2$): pour pouvoir calculer les ondes de pression et évaluer l'impact de celles-ci sur les structures, il faudra

- Avoir une caractérisation entropique du modèle EDP dans la limite non visqueuse (E),
- Savoir décrire les ondes de choc associées au modèle considéré (RH),
- Disposer d'un modèle au premier ordre à structure hyperbolique (H)
- Assurer le respect des bornes (densité positive, énergie interne positive) pour les variables/solutions (au moins régulières...!) du domaine thermodynamique admissible (P);
- Possible symétrisation (S) .

Objectif principal et cahier des charges

Question: Construction de modèles aptes à la représentation d'écoulements triphasiques ?

Contraintes pour le modèle EDP multiphasique ($k > 2$): pour pouvoir calculer les ondes de pression et évaluer l'impact de celles-ci sur les structures, il faudra

- Avoir une caractérisation entropique du modèle EDP dans la limite non visqueuse (E),
- Savoir décrire les ondes de choc associées au modèle considéré (RH),
- Disposer d'un modèle au premier ordre à structure hyperbolique (H)
- Assurer le respect des bornes (densité positive, énergie interne positive) pour les variables/solutions (au moins régulières...!) du domaine thermodynamique admissible (P);
- Possible symétrisation (S) .

Objectif principal et cahier des charges

Question: Construction de modèles aptes à la représentation d'écoulements triphasiques ?

Contraintes pour le modèle EDP multiphasique ($k > 2$): pour pouvoir calculer les ondes de pression et évaluer l'impact de celles-ci sur les structures, il faudra

- Avoir une caractérisation entropique du modèle EDP dans la limite non visqueuse (E),
- Savoir décrire les ondes de choc associées au modèle considéré (RH),
- Disposer d'un modèle au premier ordre à structure hyperbolique (H)
- Assurer le respect des bornes (densité positive, énergie interne positive) pour les variables/solutions (au moins régulières...!) du domaine thermodynamique admissible (P);
- Possible symétrisation (S) .

Méthodologie

Rappel de la configuration : un constituant en phase liquide (métal) et un constituant (eau) potentiellement présent sous deux phases, les trois étant immiscibles.

L'approche consiste alors à introduire 3 phases distinctes, et pour une configuration barotrope, sans échanges d'énergie, à partir d'une souche EDP (vérifiant invariance Galiléenne) admissible en configuration :

- monophasique ($k = 1$),
- diphasique ($k = 1, 2$), -cf. note de rappel initiale-,

puis à considérer les différentes contraintes du CdC, soit :

- Critère d'entropie (E),
- Critère d'existence de relations de saut (RH),

Il faudra ensuite confronter le modèle aux contraintes (S, P, H).

Modèle triphasique barotrope [P21] -1-

Considérons la souche suivante pour un modèle barotrope à 3 champs de vitesse (P11):

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_k) + V_I(W)\nabla\cdot(\alpha_k) &= S_{\alpha_k}(W) \\ \partial_t(m_k) + \nabla\cdot(m_k\mathbf{U_k}) &= S^{bar}_{\Gamma_k}(W) \\ \partial_t(m_k\mathbf{U_k}) + \nabla\cdot(m_k\mathbf{U_k}\otimes\mathbf{U_k} + \alpha_k P_k\mathbf{Id}) + \Sigma_{l\neq k}P_{kl}(W)\nabla(\alpha_l) &= S_{Q_k}(W) \end{aligned} \tag{1}$$

où :

- α_k désigne la moyenne statistique de phase k ($\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$),
- $m_k=\alpha_k\rho_k$ désigne la masse partielle de phase k,
- U_k désigne la vitesse moyenne de phase k,
- $P_k=p_k(\rho_k)$ le champ de pression moyenne de phase k, avec $c_k^2=p_k'(\rho_k)>0$.

La variable d'état sera donc ici $W=(\alpha_k,\rho_k,U_k)$.

Modèle triphasique barotrope [P21] -1-

Considérons la souche suivante pour un modèle barotrope à 3 champs de vitesse (P11):

$$\begin{gathered}
\partial_t(\alpha_k) + V_I(W)\nabla\cdot(\alpha_k) = S_{\alpha_k}(W) \\
\partial_t(m_k) + \nabla\cdot(m_k\mathbf{U_k}) = S^{bar}_{\Gamma_k}(W) \\
\partial_t(m_k\mathbf{U_k}) + \nabla\cdot(m_k\mathbf{U_k}\otimes\mathbf{U_k} + \alpha_k P_k\mathbf{Id}) + \Sigma_{l\neq k}P_{kl}(W)\nabla(\alpha_l) = S_{Q_k}(W)
\end{gathered} \tag{1}$$

où :

- α_k désigne la moyenne statistique de phase k ($\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$),
- $m_k=\alpha_k\rho_k$ désigne la masse partielle de phase k,
- U_k désigne la vitesse moyenne de phase k,
- $P_k=p_k(\rho_k)$ le champ de pression moyenne de phase k, avec $c_k^2=p_k'(\rho_k)>0$.

La variable d'état sera donc ici $W=(\alpha_k,\rho_k,U_k)$.

Modèle triphasique barotrope -2-

Le système est fermé. Il y a donc des contraintes sur les termes de transfert interfacial:

$$\Sigma_k S_{\alpha_k}(W) = \Sigma_k S^{bar}_{\Gamma_k}(W) = \Sigma_k S_{Q_k}(W) = 0$$

Postulons maintenant la forme suivante (IG / consistance) pour la vitesse d'interface:

$$V_I(W) = a_1(W)U_1 + a_2(W)U_2 + a_3(W)U_3$$

avec :

$$a_1(W) + a_2(W) + a_3(W) = 1$$

Et considérons la forme suivante (additivité) de l'énergie du système:

$$\eta(W) = \Sigma_k m_k \left(U_k^2/2 + \psi_k(\rho_k) \right)$$

sachant que :

$$\rho_k^2 \psi_k'(\rho_k) = P_k(\rho_k)$$

en négligeant donc l'energie associée à l'interface.

Modèle triphasique barotrope -2-

Le système est fermé. Il y a donc des contraintes sur les termes de transfert interfacial:

$$\Sigma_k S_{\alpha_k}(W) = \Sigma_k S^{bar}_{\Gamma_k}(W) = \Sigma_k S_{Q_k}(W) = 0$$

Postulons maintenant la forme suivante (IG / consistance) pour la vitesse d'interface:

$$V_I(W) = a_1(W)U_1 + a_2(W)U_2 + a_3(W)U_3$$

avec :

$$a_1(W) + a_2(W) + a_3(W) = 1$$

Et considérons la forme suivante (additivité) de l'énergie du système:

$$\eta(W) = \Sigma_k m_k \left(U_k^2/2 + \psi_k(\rho_k) \right)$$

sachant que :

$$\rho_k^2 \psi_k'(\rho_k) = P_k(\rho_k)$$

en négligeant donc l'energie associée à l'interface.

Modèle triphasique barotrope -2-

Le système est fermé. Il y a donc des contraintes sur les termes de transfert interfacial:

$$\Sigma_k S_{\alpha_k}(W) = \Sigma_k S^{bar}_{\Gamma_k}(W) = \Sigma_k S_{Q_k}(W) = 0$$

Postulons maintenant la forme suivante (IG / consistance) pour la vitesse d'interface:

$$V_I(W) = a_1(W)U_1 + a_2(W)U_2 + a_3(W)U_3$$

avec :

$$a_1(W) + a_2(W) + a_3(W) = 1$$

Et considérons la forme suivante (additivité) de l'énergie du système:

$$\eta(W) = \Sigma_k m_k \left(U_k^2/2 + \psi_k(\rho_k) \right)$$

sachant que :

$$\rho_k^2 \psi_k'(\rho_k) = P_k(\rho_k)$$

en négligeant donc l'energie associée à l'interface.

Modèle triphasique barotrope -3-

Proposition: Pour le jeu de lois de fermeture suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} P_{12}(W) = (1-a_1(W))P_1 + a_1(W)P_2 \; ; \\ P_{21}(W) = a_2(W)P_1 + (1-a_2(W))P_2 \; ; \\ P_{13}(W) = (1-a_1(W))P_1 + a_1(W)P_3 \; ; \\ P_{31}(W) = a_3(W)P_1 + (1-a_3(W))P_3 \; ; \\ P_{23}(W) = (1-a_2(W))P_2 + a_2(W)P_3 \; ; \\ P_{32}(W) = a_3(W)P_2 + (1-a_3(W))P_3 \; ; \end{array}\right. \qquad (2)$$

les solutions régulières du modèle vérifient l'(in)égalité suivante:

$$\partial_t\left(\eta(W)\right) + \partial_x\left(f_\eta(W)\right) \leq 0$$

avec:

$$f_\eta(W) = \Sigma_k m_k \left(U_k^2/2 + \psi_k(\rho_k) + \frac{P_k}{\rho_k}\right) U_k$$

Nous venons d'invoquer le critère E, en l'absence des termes sources.

Modèle triphasique barotrope -3-

Proposition: Pour le jeu de lois de fermeture suivant:

$$\begin{cases} P_{12}(W) = (1 - a_1(W))P_1 + a_1(W)P_2 \ ; \\ P_{21}(W) = a_2(W)P_1 + (1 - a_2(W))P_2 \ ; \\ P_{13}(W) = (1 - a_1(W))P_1 + a_1(W)P_3 \ ; \\ P_{31}(W) = a_3(W)P_1 + (1 - a_3(W))P_3 \ ; \\ P_{23}(W) = (1 - a_2(W))P_2 + a_2(W)P_3 \ ; \\ P_{32}(W) = a_3(W)P_2 + (1 - a_3(W))P_3 \ ; \end{cases} \tag{2}$$

les solutions régulières du modèle vérifient l'(in)égalité suivante:

$$\partial_t \left(\eta(W)\right) + \partial_x \left(f_\eta(W)\right) \leq 0$$

avec:

$$f_\eta(W) = \Sigma_k m_k \left(U_k^2/2 + \psi_k(\rho_k) + \frac{P_k}{\rho_k} \right) U_k$$

Nous venons d'invoquer le critère E, en l'absence des termes sources.

Modèle triphasique barotrope -4-

Quelle est la forme admissible pour les termes sources $S'_{\alpha_k} W)$, $S_{Q_k}(W)$?

Proposition: Une forme admissible des termes sources, compatible avec l'inégalité d'energie E, est:

$$\begin{cases} S_{\alpha_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3} \left(d_{kl}(W)(P_k - P_l) \right) \; ; \\ S_{Q_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3} \left(e_{kl}(W)(U_l - U_k) \right) \end{cases} \tag{3}$$

sachant que:

$$0 < d_{kl}(W) = d_{lk}(W),$$

et:

$$0 \leq e_{kl}(W) = e_{lk}(W).$$

On peut de la même manière construire une forme admissible vs E du terme source d'échange de masse $S_{\Gamma_k}(W)$.

Approche dyadique : les échelles de temps de relaxation associées à d_{kl}, e_{kl} sont construites avec référence au cadre diphasique.

Modèle triphasique barotrope -4-

Quelle est la forme admissible pour les termes sources $S'_{\alpha_k} W)$, $S_{Q_k}(W)$?

Proposition: Une forme admissible des termes sources, compatible avec l'inégalité d'energie E, est:

$$\begin{cases} S_{\alpha_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3}\left(d_{kl}(W)(P_k - P_l)\right) \ ; \\ S_{Q_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3}\left(e_{kl}(W)(U_l - U_k)\right) \end{cases} \tag{3}$$

sachant que:

$$0 < d_{kl}(W) = d_{lk}(W),$$

et:

$$0 \leq e_{kl}(W) = e_{lk}(W).$$

On peut de la même manière construire une forme admissible vs E du terme source d'échange de masse $S_{\Gamma_k}(W)$.

Approche dyadique : les échelles de temps de relaxation associées à d_{kl}, e_{kl} sont construites avec référence au cadre diphasique.

Modèle triphasique barotrope -4-

Quelle est la forme admissible pour les termes sources $S'_{\alpha_k}W)$, $S_{Q_k}(W)$ *?*

Proposition: Une forme admissible des termes sources, compatible avec l'inégalité d'energie E, est:

$$\begin{cases} S_{\alpha_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3}\left(d_{kl}(W)(P_k - P_l)\right) \ ; \\ S_{Q_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3}\left(e_{kl}(W)(U_l - U_k)\right) \end{cases} \tag{3}$$

sachant que:

$$0 < d_{kl}(W) = d_{lk}(W),$$

et:

$$0 \leq e_{kl}(W) = e_{lk}(W).$$

On peut de la même manière construire une forme admissible vs E du terme source d'échange de masse $S_{\Gamma_k}(W)$.

Approche dyadique : les échelles de temps de relaxation associées à d_{kl}, e_{kl} sont construites avec référence au cadre diphasique.

Modèle triphasique barotrope -4-

Quelle est la forme admissible pour les termes sources $S'_{\alpha_k} W)$, $S_{Q_k}(W)$ *?*

Proposition: Une forme admissible des termes sources, compatible avec l'inégalité d'energie E, est:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\alpha_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3} \left(d_{kl}(W)(P_k - P_l)\right) \; ; \\ S_{Q_k}(W) = \Sigma_{l=1}^{3} \left(e_{kl}(W)(U_l - U_k)\right) \end{array} \right. \tag{3}$$

sachant que:

$$0 < d_{kl}(W) = d_{lk}(W),$$

et:

$$0 \leq e_{kl}(W) = e_{lk}(W).$$

On peut de la même manière construire une forme admissible vs E du terme source d'échange de masse $S_{\Gamma_k}(W)$.

Approche dyadique : les échelles de temps de relaxation associées à d_{kl}, e_{kl} sont construites avec référence au cadre diphasique.

Modèle triphasique barotrope -5-

Quelle forme admissible pour les fonctions $a_k(W)$?

Proposition: On considère les formes suivantes :

- $$a_k(W) = \delta_{kk_0},$$
- ou:
$$a_k(W) = \frac{m_k}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Dans ce cas, on garantit la structure LD du champ associé à $V_I(W)$.

On peut alors définir de manière unique les relations de saut dans les champs simples ayant une structure VNL.

On peut étendre cette approche à d'autres lois de fermeture "EDP" pour les fonctions $a_k(W)$.

Modèle triphasique barotrope -5-

Quelle forme admissible pour les fonctions $a_k(W)$?

Proposition: On considère les formes suivantes :

- $$a_k(W) = \delta_{kk_0},$$
- ou:
$$a_k(W) = \frac{m_k}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Dans ce cas, on garantit la structure LD du champ associé à $V_I(W)$.

On peut alors définir de manière unique les relations de saut dans les champs simples ayant une structure VNL.

On peut étendre cette approche à d'autres lois de fermeture "EDP" pour les fonctions $a_k(W)$.

Modèle triphasique barotrope -5-

Quelle forme admissible pour les fonctions $a_k(W)$?

Proposition: On considère les formes suivantes :

-
$$a_k(W) = \delta_{kk_0},$$
- ou:
$$a_k(W) = \frac{m_k}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Dans ce cas, on garantit la structure LD du champ associé à $V_I(W)$.

On peut alors définir de manière unique les relations de saut dans les champs simples ayant une structure VNL.

On peut étendre cette approche à d'autres lois de fermeture "EDP" pour les fonctions $a_k(W)$.

Modèle triphasique barotrope -5-

Quelle forme admissible pour les fonctions $a_k(W)$?

Proposition: On considère les formes suivantes :

- $$a_k(W) = \delta_{kk_0},$$
- ou:
$$a_k(W) = \frac{m_k}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Dans ce cas, on garantit la structure LD du champ associé à $V_I(W)$.

On peut alors définir de manière unique les relations de saut dans les champs simples ayant une structure VNL.

On peut étendre cette approche à d'autres lois de fermeture "EDP" pour les fonctions $a_k(W)$.

Modèle triphasique barotrope -6-

Synthèse : Le système modèle est maintenant fermé, dès lors que les échelles de temps $d_{kl}(W)$, $e_{kl}(W)$ sont données.

$$\begin{gathered}
\partial_t\left(\alpha_k\right)+V_I(W)\nabla\cdot\left(\alpha_k\right)=S_{\alpha_k}(W)\\
\partial_t\left(m_k\right)+\nabla\cdot\left(m_k\mathbf{U_k}\right)=S^{bar}_{\Gamma_k}(W)\\
\partial_t\left(m_k\mathbf{U_k}\right)+\nabla\cdot\left(m_k\mathbf{U_k}\otimes\mathbf{U_k}+\alpha_kP_k\mathbf{Id}\right)+\Sigma_{l\neq k}P_{kl}(W)\nabla(\alpha_l)=S_{Q_k}(W)
\end{gathered} \tag{4}$$

- On dispose d'une inégalité d'énergie (E) ;
- On vérifie que le système homogène associé est hyperbolique (H) : les vap sont réelles, et les vepd engendrent l'espace des états (hormis dans le cas résonnant) ;
- On peut écrire à la traversée d'une onde simple les relations de saut (RH) ;
- On peut symétriser le système (S) ;
- Les solutions régulières entretiennent les domaines thermodynamiques admissibles.

Quid du cas non barotrope ?

Modèle triphasique barotrope -6-

Synthèse : Le système modèle est maintenant fermé, dès lors que les échelles de temps $d_{kl}(W)$, $e_{kl}(W)$ sont données.

$$\begin{gathered}
\partial_t\left(\alpha_k\right) + V_I(W)\nabla\cdot\left(\alpha_k\right) = S_{\alpha_k}(W) \\
\partial_t\left(m_k\right) + \nabla\cdot\left(m_k\mathbf{U_k}\right) = S^{bar}_{\Gamma_k}(W) \\
\partial_t\left(m_k\mathbf{U_k}\right) + \nabla\cdot\left(m_k\mathbf{U_k}\otimes\mathbf{U_k} + \alpha_k P_k\mathbf{Id}\right) + \Sigma_{l\neq k}P_{kl}(W)\nabla(\alpha_l) = S_{Q_k}(W)
\end{gathered} \tag{4}$$

- On dispose d'une inégalité d'énergie (E) ;
- On vérifie que le système homogène associé est hyperbolique (H) : les vap sont réelles, et les vepd engendrent l'espace des états (hormis dans le cas résonnant) ;
- On peut écrire à la traversée d'une onde simple les relations de saut (RH) ;
- On peut symétriser le système (S) ;
- Les solutions régulières entretiennent les domaines thermodynamiques admissibles.

Quid du cas non barotrope ?

Modèle souche EDP triphasique avec énergie [P5]

Méthodologie identique: E,RH puis vérification S, P, H

Soient les variables α_k, ρ_k, P_k, et U_k désignant respectivement les fractions, densités, pressions et vitesses de phase k. Le système souche EDP est :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_k) + V_\Sigma(W)\partial_x(\alpha_k) = \phi_k(W) \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k) + \partial_x(\alpha_k\rho_k U_k) = 0 \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k U_k) + \partial_x\left(\alpha_k\rho_k U_k^2 + \alpha_k P_k\right) + \Sigma_{l=1,l\neq k}^3 \pi_{kl}(W)\partial_x(\alpha_l) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^3 I_{kl}(W) \\ \partial_t(\alpha_k E_k) + \partial_x(\alpha_k U_k(E_k + P_k)) - \Sigma_{l=1,l\neq k}^3 \pi_{kl}(W)\partial_t(\alpha_l) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^3 (V_{kl}(W)I_{kl}(W) - \end{cases}$$

avec: $E_k = \rho_k e_k(P_k, \rho_k) + \rho_k \frac{U_k^2}{2}$ pour $k = 1, 2, 3$.

Question : quelles lois de fermeture admissibles au sens du CdC pour:

$$I_{kl}(W), \psi_{kl}(W), \phi_k(W), V_{kl}(W), \pi_{kl}(W), V_\Sigma(W)$$

sachant que $I_{kl}(W), \psi_{kl}(W)$ sont anti-symetriques et $V_{kl}(W) = V_{lk}(W)$.

Modèle souche EDP triphasique avec énergie [P5]

Méthodologie identique: E,RH puis vérification S, P, H

Soient les variables α_k, ρ_k, P_k, et U_k désignant respectivement les fractions, densités, pressions et vitesses de phase k. Le système souche EDP est :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + V_\Sigma(W)\partial_x(\alpha_k) = \phi_k(W) \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k) + \partial_x(\alpha_k\rho_k U_k) = 0 \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k U_k) + \partial_x\left(\alpha_k\rho_k U_k^2 + \alpha_k P_k\right) + \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3}\pi_{kl}(W)\partial_x(\alpha_l) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} I_{kl}(W) \\ \partial_t(\alpha_k E_k) + \partial_x(\alpha_k U_k(E_k + P_k)) - \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3}\pi_{kl}(W)\partial_t(\alpha_l) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3}(V_{kl}(W) I_{kl}(W) - \end{array}\right.$$

avec: $E_k = \rho_k e_k(P_k, \rho_k) + \rho_k \frac{U_k^2}{2}$ pour $k = 1, 2, 3$.

Question : quelles lois de fermeture admissibles au sens du CdC pour:

$$I_{kl}(W), \psi_{kl}(W), \phi_k(W), V_{kl}(W), \pi_{kl}(W), V_\Sigma(W)$$

sachant que $I_{kl}(W), \psi_{kl}(W)$ sont anti-symetriques et $V_{kl}(W) = V_{lk}(W)$.

Contraintes

La contrainte d'immiscibilité impose:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3} \alpha_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{3} \phi_k(W) = 0 \end{array} \right.$$

et les termes de transfert interfacial doivent satisfaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} I_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=1}^{3} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} \psi_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1,l\neq k}^{3} \pi_{kl}(W) \partial_x (\alpha_l) = 0 \end{array} \right.$$

On note (toujours) les masses partielles: $m_k = \alpha_k \rho_k$ en phase k.

Remarque: par la suite on "oublie" les termes de transfert de masse.

Contraintes

La contrainte d'immiscibilité impose:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3} \alpha_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{3} \phi_k(W) = 0 \end{array} \right.$$

et les termes de transfert interfacial doivent satisfaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} I_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=1}^{3} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} \psi_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1,l\neq k}^{3} \pi_{kl}(W) \partial_x (\alpha_l) = 0 \end{array} \right.$$

On note (toujours) les masses partielles: $m_k = \alpha_k \rho_k$ en phase k.

Remarque: par la suite on "oublie" les termes de transfert de masse.

Contraintes

La contrainte d'immiscibilité impose:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{3} \alpha_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{3} \phi_k(W) = 0 \end{cases}$$

et les termes de transfert interfacial doivent satisfaire :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{3} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} I_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=1}^{3} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} \psi_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1,l\neq k}^{3} \pi_{kl}(W)\partial_x(\alpha_l) = 0 \end{cases}$$

On note (toujours) les masses partielles: $m_k = \alpha_k \rho_k$ en phase k.

Remarque: par la suite on "oublie" les termes de transfert de masse.

Lois de fermeture - 1 -

Inégalité d'entropie:
On définit (η, f_η) *le couple entropie- flux d'entropie:*

$$\eta = m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3$$

$$f_\eta = m_1 S_1 U_1 + m_2 S_2 U_2 + m_3 S_3 U_3$$

Les solutions régulières du modèle souche EDP vérifient :

$$\partial_t (\eta) + \partial_x (f_\eta) = RHS_\eta \ .$$

sachant que les entropies phasiques $S_k(P_k, \rho_k)$ vérifient:

$$c_k^2 \partial_{P_k} (S_k) + \partial_{\rho_k} (S_k) = 0 \ .$$

Lois de fermeture - 2 -

Forme exacte du second membre RHS_η

$$
\begin{aligned}
RHS_\eta &= \sum_{k=1}^{3} a_k \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} \psi_{kl}(W) \\
&+ \sum_{k=1}^{3} a_k \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} (V_{kl} - U_k) I_{kl}(W) \\
&+ \sum_{k=1}^{3} a_k \sum_{l=1,l\neq k}^{3} (\pi_{kl}(W) - P_k)\phi_l \\
&+ \sum_{k=1}^{3} a_k (U_k - V_\Sigma(W)) \sum_{l=1,l\neq k} (\pi_{kl}(W) - P_k) \partial_x(\alpha_l)
\end{aligned}
$$

notant :

$$a_k = \partial_{P_k}(s_k) / \partial_{P_k}(e_k)$$

E - La contrainte: $0 \leq RHS_\eta$ permet d'exhiber les fermetures admissibles.

On postule la forme "consistante" et IG :

$$V_\Sigma(W) = \sum_{k=1}^{3} \beta_k(W) U_k,$$

avec: $\sum_{k=1}^{3} \beta_k(W) = 1$, et on note que :

$$U_1 - U_3 = (U_1 - U_2) + (U_2 - U_3)$$

Lois de fermeture - 2 -

Forme exacte du second membre RHS_η

$$\begin{aligned} RHS_\eta &= \sum_{k=1}^{3} a_k \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} \psi_{kl}(W) \\ &+ \sum_{k=1}^{3} a_k \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} (V_{kl} - U_k) I_{kl}(W) \\ &+ \sum_{k=1}^{3} a_k \sum_{l=1,l\neq k}^{3} (\pi_{kl}(W) - P_k)\phi_l \\ &+ \sum_{k=1}^{3} a_k (U_k - V_\Sigma(W)) \sum_{l=1,l\neq k} (\pi_{kl}(W) - P_k) \partial_x (\alpha_l) \end{aligned}$$

notant :

$$a_k = \partial_{P_k}(s_k) / \partial_{P_k}(e_k)$$

E - La contrainte: $0 \leq RHS_\eta$ permet d'exhiber les fermetures admissibles.
On postule la forme "consistante" et IG :

$$V_\Sigma(W) = \sum_{k=1}^{3} \beta_k(W) U_k,$$

avec: $\sum_{k=1}^{3} \beta_k(W) = 1$, et on note que :

$$U_1 - U_3 = (U_1 - U_2) + (U_2 - U_3)$$

Lois de fermeture - 3 -

Lois de fermeture pour les fonctions $\pi_{kl}(W)$:

On pose (modèle à production d'entropie minimale):

$$\sum_{k=1}^{3}(U_k - V_\Sigma(W))a_k\left(\sum_{l=1,l\neq k}^{3}(P_k - \pi_{kl}(W))\partial_x(\alpha_l)\right) = 0$$

et on définit : $Z = (\pi_{12}(W), \pi_{21}(W), \pi_{13}(W), \pi_{31}(W), \pi_{23}(W), \pi_{32}(W))$, et :

$$C^t = (a_3\beta_1(W)P_3 - a_2\beta_1(W)P_2, a_2\beta_3(W)P_2 + (1-\beta_3(W))a_3P_3,$$
$$a_3\beta_1(W)P_3 + (1-\beta_1(W))a_1P_1, a_1\beta_3(W)P_1 + (1-\beta_3(W))a_3P_3, 0, 0)$$

Proposition: Il existe un unique jeu de six fonctions $\pi_{kl}(W)$ compatibles avec le modèle à production d'entropie minimale.

Les contraintes précédentes sont linéaires (vs $\pi_{kl}(W)$) et impliquent alors :

$$BZ = C$$

où B désigne la matrice

Lois de fermeture - 3 -

Lois de fermeture pour les fonctions $\pi_{kl}(W)$:

On pose (modèle à production d'entropie minimale):

$$\sum_{k=1}^{3}(U_k - V_\Sigma(W))a_k(\sum_{l=1,l\neq k}^{3}(P_k - \pi_{kl}(W))\partial_x(\alpha_l)) = 0$$

et on définit : $Z = (\pi_{12}(W), \pi_{21}(W), \pi_{13}(W), \pi_{31}(W), \pi_{23}(W), \pi_{32}(W))$, et :

$$C^t = (a_3\beta_1(W)P_3 - a_2\beta_1(W)P_2, a_2\beta_3(W)P_2 + (1-\beta_3(W))a_3P_3,$$
$$a_3\beta_1(W)P_3 + (1-\beta_1(W))a_1P_1, a_1\beta_3(W)P_1 + (1-\beta_3(W))a_3P_3, 0, 0)$$

Proposition: Il existe un unique jeu de six fonctions $\pi_{kl}(W)$ compatibles

avec le modèle à production d'entropie minimale.

Les contraintes précédentes sont linéaires (vs $\pi_{kl}(W)$) et impliquent alors :

$$BZ = C$$

où B désigne la matrice

Lois de fermeture - 3 -

Lois de fermeture pour les fonctions $\pi_{kl}(W)$:

On pose (modèle à production d'entropie minimale):

$$\sum_{k=1}^{3}(U_k - V_\Sigma(W))a_k(\sum_{l=1, l\neq k}^{3}(P_k - \pi_{kl}(W))\partial_x(\alpha_l)) = 0$$

et on définit : $Z = (\pi_{12}(W), \pi_{21}(W), \pi_{13}(W), \pi_{31}(W), \pi_{23}(W), \pi_{32}(W))$, et :

$$C^t = (a_3\beta_1(W)P_3 - a_2\beta_1(W)P_2, a_2\beta_3(W)P_2 + (1-\beta_3(W))a_3P_3,$$
$$a_3\beta_1(W)P_3 + (1-\beta_1(W))a_1P_1, a_1\beta_3(W)P_1 + (1-\beta_3(W))a_3P_3, 0, 0)$$

Proposition: Il existe un unique jeu de six fonctions $\pi_{kl}(W)$ compatibles avec le modèle à production d'entropie minimale.

Les contraintes précédentes sont linéaires (vs $\pi_{kl}(W)$) et impliquent alors :

$$BZ = C$$

où B désigne la matrice

Lois de fermeture - 4 -

$$B = \begin{pmatrix} a_1(\beta_1 - 1) & 0 & a_1(1-\beta_1) & 0 & -a_2\beta_1 & a_3\beta_1 \\ -a_1\beta_3 & 0 & a_1\beta_3 & 0 & a_2\beta_3 & a_3(1-\beta_3) \\ 0 & a_2\beta_1 & a_1(1-\beta_1) & a_3\beta_1 & -a_2\beta_1 & 0 \\ 0 & -a_2\beta_3 & a_1\beta_3 & a_3(1-\beta_3) & a_2\beta_3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un petit calcul permet de montrer que le déterminant de B vaut :

$$det(B) = -(a_1 a_2 \beta_3(W) + a_1 a_3 \beta_2(W) + a_2 a_3 \beta_1(W))^2$$

Remarques:

- *On note que les $\pi_{kl}(W)$ sont fonctions de V_Σ, et non l'inverse, ce qui n'apparait pas clairement dans le cadre diphasique...!.*
- $\pi_{kl}(W)$ n'est symétrique qu'à l'équilibre !
- *L' extension à un plus grand nombre de phases est possible ... mais pénible [P24-P26]!*

Lois de fermeture - 4 -

$$B = \begin{pmatrix} a_1(\beta_1 - 1) & 0 & a_1(1-\beta_1) & 0 & -a_2\beta_1 & a_3\beta_1 \\ -a_1\beta_3 & 0 & a_1\beta_3 & 0 & a_2\beta_3 & a_3(1-\beta_3) \\ 0 & a_2\beta_1 & a_1(1-\beta_1) & a_3\beta_1 & -a_2\beta_1 & 0 \\ 0 & -a_2\beta_3 & a_1\beta_3 & a_3(1-\beta_3) & a_2\beta_3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un petit calcul permet de montrer que le déterminant de B vaut :

$$det(B) = -(a_1 a_2 \beta_3(W) + a_1 a_3 \beta_2(W) + a_2 a_3 \beta_1(W))^2$$

Remarques:

- *On note que les $\pi_{kl}(W)$ sont fonctions de V_Σ, et non l'inverse, ce qui n'apparait pas clairement dans le cadre diphasique...!.*
- $\pi_{kl}(W)$ n'est symétrique qu'à l'équilibre !
- *L' extension à un plus grand nombre de phases est possible ... mais pénible [P24-P26]!*

Lois de fermeture - 4 -

$$B = \begin{pmatrix} a_1(\beta_1 - 1) & 0 & a_1(1-\beta_1) & 0 & -a_2\beta_1 & a_3\beta_1 \\ -a_1\beta_3 & 0 & a_1\beta_3 & 0 & a_2\beta_3 & a_3(1-\beta_3) \\ 0 & a_2\beta_1 & a_1(1-\beta_1) & a_3\beta_1 & -a_2\beta_1 & 0 \\ 0 & -a_2\beta_3 & a_1\beta_3 & a_3(1-\beta_3) & a_2\beta_3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un petit calcul permet de montrer que le déterminant de B vaut :

$$det(B) = -(a_1 a_2 \beta_3(W) + a_1 a_3 \beta_2(W) + a_2 a_3 \beta_1(W))^2$$

Remarques:

- *On note que les $\pi_{kl}(W)$ sont fonctions de V_Σ, et non l'inverse, ce qui n'apparait pas clairement dans le cadre diphasique...!.*
- $\pi_{kl}(W)$ n'est symétrique qu'à l'équilibre !
- *L' extension à un plus grand nombre de phases est possible ... mais pénible [P24-P26]!*

Lois de fermeture - 4 -

$$B = \begin{pmatrix} a_1(\beta_1 - 1) & 0 & a_1(1-\beta_1) & 0 & -a_2\beta_1 & a_3\beta_1 \\ -a_1\beta_3 & 0 & a_1\beta_3 & 0 & a_2\beta_3 & a_3(1-\beta_3) \\ 0 & a_2\beta_1 & a_1(1-\beta_1) & a_3\beta_1 & -a_2\beta_1 & 0 \\ 0 & -a_2\beta_3 & a_1\beta_3 & a_3(1-\beta_3) & a_2\beta_3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un petit calcul permet de montrer que le déterminant de B vaut :

$$det(B) = -(a_1 a_2 \beta_3(W) + a_1 a_3 \beta_2(W) + a_2 a_3 \beta_1(W))^2$$

Remarques:

- *On note que les $\pi_{kl}(W)$ sont fonctions de V_Σ, et non l'inverse, ce qui n'apparait pas clairement dans le cadre diphasique...!.*
- $\pi_{kl}(W)$ n'est symétrique qu'à l'équilibre !
- *L' extension à un plus grand nombre de phases est possible ... mais pénible [P24-P26]!*

Lois de fermeture - 5 -

Application: on suppose que:

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Dans ce cas l'unique jeu de pressions interfaciales est :

$$\pi_{13} = \pi_{31} = \pi_{32} = P_3$$
$$\pi_{12} = \pi_{21} = \pi_{23} = P_2$$

Ce modèle est de fait l'analogue 3ϕ du modèle 2ϕ de Baer Nunziato présenté en introduction.

Lois de fermeture - 6 -

Lois de fermeture admissibles pour les termes sources $\phi_k(W)$:

$$\phi_2 = \alpha_2(f_{1-2}(W)\alpha_1(P_2 - P_1) + f_{2-3}(W)\alpha_3(P_2 - P_3))/|\mathcal{P}|$$
$$\phi_3 = \alpha_3(f_{1-3}(W)\alpha_1(P_3 - P_1) + f_{2-3}(W)\alpha_2(P_3 - P_2))/|\mathcal{P}|$$
$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$

Les fonctions $f_{k-l} = f_{l-k}$ sont positives, et font intervenir les échelles de temps de relaxation en pression. Celles-ci sont extraites du cadre bibliographique diphasique (liaisons dyadiques).

La relaxation en pression est assurée en écoulement "flow in a box", avec une condition de seuil sur les CI très peu restrictive. Elle n'est pas nécessairement monotone.

Lois de fermeture - 7 -

Lois de fermeture pour les termes sources $\psi_k(W) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} \psi_{kl}(W)$:

$$
\begin{aligned}
&\psi_2(W) = K_{21}(W)(a_2 - a_1) + K_{23}(W)(a_2 - a_3)\\
&\psi_3(W) = K_{31}(W)(a_3 - a_1) + K_{32}(W)(a_3 - a_2)\\
&\psi_1(W) + \psi_2(W) + \psi_3(W) = 0
\end{aligned}
$$

sachant que les fonctions $K_{kl}(W)$ sont positives. La contrainte :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{3} a_k \psi_k$$

est satisfaite E.

La relaxation en température est également assurée en écoulement homogène, mais n'est pas nécessairement monotone.

Lois de fermeture - 8 -

Lois admissibles pour les transferts de quantité de mouvement entre phases $I_k(W) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^{3} I_{kl}(W)$:

Les lois suivantes sont admissibles au regard de E:

$$
\begin{aligned}
&I_2(W) = m_2 m_1 (U_1 - U_2)/\tau_{12}^U + m_2 m_3 (U_3 - U_2)/\tau_{23}^U \\
&I_3(W) = m_1 m_3 (U_1 - U_3)/\tau_{13}^U + m_2 m_3 (U_2 - U_3)/\tau_{32}^U \\
&I_1(W) + I_2(W) + I_3(W) = 0
\end{aligned}
$$

sachant que les échelles de temps $\tau_{kl}^U = \tau_{lk}^U$ sont symétriques positives.

On est ici encore assuré du retour asymptotique à l'équilibre des vitesses.

Lois de fermeture - 9 -

On considère toujours une hypothese de structure LD pour le champ associé à $\lambda = V_\Sigma$.

Vitesses d'interface admissibles:

Les fermetures suivantes permettent de guarantir la structure LD pour le champ associé à V_Σ :

$$V_\Sigma = U_k$$

$$V_\Sigma = \frac{m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 U_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Lois de fermeture - 9 -

On considère toujours une hypothese de structure LD pour le champ associé à $\lambda = V_\Sigma$.

Vitesses d'interface admissibles:

Les fermetures suivantes permettent de guarantir la structure LD pour le champ associé à V_Σ :

$$V_\Sigma = U_k$$

$$V_\Sigma = \frac{m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 U_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Propriètés du modèle

Synthèse:

- Le modèle triphasique précédent satisfait une **inégalité d'entropie**, l'entropie étant :

$$\eta(W) = m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 \tag{5}$$

- Le modèle renvoie naturellement à l'équilibre en vitesse, pression, température;
- Le système convectif (non conservatif) est hyperbolique. On exhibe onze vap réelles et l'espace engendré par les vepd est l'espace des états complet ssi:

$$\left|\frac{U_k - V_\Sigma}{c_k}\right| \neq 1$$

- Les relations de saut sont explicites en champ isolé **quand** V_Σ **est choisi parmi les fermetures ci-dessus.**
- Le système est symétrisable (loin de la résonance).

Propriètés du modèle

Synthèse:

- Le modèle triphasique précédent satisfait une **inégalité d'entropie**, l'entropie étant :

$$\eta(W) = m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 \tag{5}$$

- Le modèle renvoie naturellement à l'équilibre en vitesse, pression, température;
- Le système convectif (non conservatif) est hyperbolique. On exhibe onze vap réelles et l'espace engendré par les vepd est l'espace des états complet ssi:

$$\left|\frac{U_k - V_\Sigma}{c_k}\right| \neq 1$$

- Les relations de saut sont explicites en champ isolé **quand** V_Σ **est choisi parmi les fermetures ci-dessus.**
- Le système est symétrisable (loin de la résonance).

Propriètés du modèle

Synthèse:

- Le modèle triphasique précédent satisfait une **inégalité d'entropie**, l'entropie étant :
$$\eta(W) = m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 \tag{5}$$

- Le modèle renvoie naturellement à l'équilibre en vitesse, pression, température;
- Le système convectif (non conservatif) est hyperbolique. On exhibe onze vap réelles et l'espace engendré par les vepd est l'espace des états complet ssi:
$$\left|\frac{U_k - V_\Sigma}{c_k}\right| \neq 1$$
- Les relations de saut sont explicites en champ isolé **quand** V_Σ **est choisi parmi les fermetures ci-dessus.**
- Le système est symétrisable (loin de la résonance).

Propriètés du modèle

Synthèse:

- Le modèle triphasique précédent satisfait une **inégalité d'entropie**, l'entropie étant :
$$\eta(W) = m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 \tag{5}$$
- Le modèle renvoie naturellement à l'équilibre en vitesse, pression, température;
- Le système convectif (non conservatif) est hyperbolique. On exhibe onze vap réelles et l'espace engendré par les vepd est l'espace des états complet ssi:
$$\left|\frac{U_k - V_\Sigma}{c_k}\right| \neq 1$$
- Les relations de saut sont explicites en champ isolé **quand V_Σ est choisi parmi les fermetures ci-dessus.**
- Le système est symétrisable (loin de la résonance).

Propriètés du modèle

Synthèse:

- Le modèle triphasique précédent satisfait une **inégalité d'entropie**, l'entropie étant :
$$\eta(W) = m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 \tag{5}$$
- Le modèle renvoie naturellement à l'équilibre en vitesse, pression, température;
- Le système convectif (non conservatif) est hyperbolique. On exhibe onze vap réelles et l'espace engendré par les vepd est l'espace des états complet ssi:
$$\left|\frac{U_k - V_\Sigma}{c_k}\right| \neq 1$$
- Les relations de saut sont explicites en champ isolé **quand V_Σ est choisi parmi les fermetures ci-dessus.**
- Le système est symétrisable (loin de la résonance).

Un modèle hybride à quatre champs (s,l,v,g) [P26]

Approche identique pour champs solide (s), liquide (l), vapeur (v) et gaz (g) miscibles avec la vapeur

Le système EDP de base est toujours, pour $k = s, l, v, g$:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + V_\Sigma(W)\partial_x(\alpha_k) = \phi_k(W), \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k) + \partial_x(\alpha_k\rho_k U_k) = 0 \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k U_k) + \partial_x(\alpha_k\rho_k U_k^2 + \alpha_k P_k) + \sum_{j=s,l,v,g,j\neq k}\pi_{kj}(W)\partial_x(\alpha_j) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^4 I_{kl}(W) \\ \partial_t(\alpha_k E_k) + \partial_x(\alpha_k U_k(E_k + P_k)) - \sum_{j=s,l,v,g,j\neq k}\pi_{kj}(W)\partial_t(\alpha_j) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^4 (V_{kl}(W) I_{kl}(\end{array}\right.$$

avec: $E_k = \rho_k e_k(P_k, \rho_k) + \rho_k \frac{U_k^2}{2}$ pour $k = s, l, v, g$.

Le gaz et vapeur sont miscibles donc:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{k=s,l,v}\alpha_k = 1 \\ \alpha_v = \alpha_g \end{array}\right.$$

Un modèle hybride à quatre champs (s,l,v,g) [P26]

Approche identique pour champs solide (s), liquide (l), vapeur (v) et gaz (g) miscibles avec la vapeur

Le système EDP de base est toujours, pour $k = s, l, v, g$:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + V_\Sigma(W)\partial_x(\alpha_k) = \phi_k(W), \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k) + \partial_x(\alpha_k\rho_k U_k) = 0 \\ \partial_t(\alpha_k\rho_k U_k) + \partial_x\left(\alpha_k\rho_k U_k^2 + \alpha_k P_k\right) + \sum_{j=s,l,v,g,j\neq k}\pi_{kj}(W)\partial_x(\alpha_j) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^4 I_{kl}(W) \\ \partial_t(\alpha_k E_k) + \partial_x(\alpha_k U_k(E_k + P_k)) - \sum_{j=s,l,v,g,j\neq k}\pi_{kj}(W)\partial_t(\alpha_j) = \Sigma_{l=1,l\neq k}^4(V_{kl}(W) I_{kl}(\end{array}\right.$$

avec: $E_k = \rho_k e_k(P_k, \rho_k) + \rho_k \frac{U_k^2}{2}$ pour $k = s, l, v, g$.

Le gaz et vapeur sont miscibles donc:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{k=s,l,v}\alpha_k = 1 \\ \alpha_v = \alpha_g \end{array}\right.$$

Contraintes

On a toujours:

$$\begin{cases} \sum_{k=s,l,v} \phi_k(W) = 0 \\ \phi_v(W) = \phi_g(W) \end{cases}$$

et les contraintes interfaciales sont maintenant:

$$\begin{cases} \sum_{k=s,l,v,g} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{4} I_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=s,l,v,g} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{4} \psi_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=s,l,v,g} \sum_{j=s,l,v,g\neq k} \pi_{kj}(W)\partial_x(\alpha_j) = 0 \end{cases}$$

On peut récrire les termes de transfert comme suit:

$$\sum_{l=s,l,v,g\neq k} \pi_{kl}(W)\partial_x(\alpha_l) = \sum_{j=s,l} \mathcal{K}_{kj}(W)\partial_x(\alpha_j)$$

Il y a donc huit fonctions $\mathcal{K}_{lj}(W)$ (et non douze :)) à modéliser.

Contraintes

On a toujours:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=s,l,v} \phi_k(W) = 0 \\ \phi_v(W) = \phi_g(W) \end{array} \right.$$

et les contraintes interfaciales sont maintenant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=s,l,v,g} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{4} I_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=s,l,v,g} \Sigma_{l=1,l\neq k}^{4} \psi_{kl}(W) = 0 \\ \sum_{k=s,l,v,g} \sum_{j=s,l,v,g\neq k} \pi_{kj}(W)\partial_x(\alpha_j) = 0 \end{array} \right.$$

On peut récrire les termes de transfert comme suit:

$$\sum_{l=s,l,v,g\neq k} \pi_{kl}(W)\partial_x(\alpha_l) = \sum_{j=s,l} \mathcal{K}_{kj}(W)\partial_x(\alpha_j)$$

Il y a donc huit fonctions $\mathcal{K}_{lj}(W)$ (et non douze :)) à modéliser.

Lois de fermeture à quatre champs hybride - 1 -

Soit (η, f_η) *le couple entropie- flux d'entropie suivant:*

$$\eta = \Sigma_{k=s,l,v,g} m_k S_k$$

$$f_\eta = \Sigma_{k=s,l,v,g} m_k S_k U_k$$

On considère toujours la vitesse d'interface suivante:

$$V_\Sigma = \sum_{k=s,l,v,g} \beta_k(W) U_k,$$

avec: $\sum_k \beta_k = 1$.

Proposition: Pour une donnée des fonctions $\beta_k(W)$, il existe un unique jeu de huit fonctions $\mathcal{K}_{jl}(W)$ garantissant que les solutions régulières satisfont :

$$\partial_t(\eta) + \partial_x(f_\eta) = RHS_\eta(W) \geq 0 \; .$$

Lois de fermeture à quatre champs hybride- 2 -

Ainsi, si on considère la vitesse interfaciale suivante :

$$\beta_s = 1, \quad \beta_l = \beta_v = \beta_g = 0$$

Quantité de mouvement

$$\partial_t (\alpha_s \rho_s U_s) + \partial_x \left(\alpha_s \rho_s U_s^2 + \alpha_s P_s\right) + (P_l - (P_v + P_g))\partial_x (\alpha_l) - (P_v + P_g)\partial_x (\alpha_s) = I_s$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k U_k) + \partial_x \left(\alpha_k \rho_k U_k^2 + \alpha_k P_k\right) - P_k \partial_x (\alpha_k) = I_k(W) \quad (k = l, v, g)$$

Energie:

$$\partial_t (\alpha_s E_s) + \partial_x (\alpha_s U_s(E_s + P_s)) - (P_l - (P_v + P_g))\partial_t (\alpha_l) + (P_v + P_g)\partial_t (\alpha_s) = ...$$

$$\partial_t (\alpha_k E_k) + \partial_x (\alpha_k U_k(E_k + P_k)) + P_k \partial_t (\alpha_k) = ... \quad (k = l, v, g)$$

Lois de fermeture à quatre champs hybride- 3 -

Lois de fermeture admissibles pour les termes sources $\phi_k(W)$:

$$\phi_l(W) = g_{ll}(W)(P_l - (P_v + P_g)) + g_{ls}(W)(P_s - (P_v + P_g));$$

$$\phi_s(W) = g_{sl}(W)(P_l - (P_v + P_g)) + g_{ss}(W)(P_s - (P_v + P_g));$$

$$\phi_v(W) = -(\phi_s(W) + \phi_l(W));$$

$$\phi_g(W) = \phi_v(W)$$

avec g_{ij} MSDP.

On déduit de la meme manière les termes sources admissibles pour $\psi_{kl}(W)$ et $I_{kl}(W)$.

Lois de fermeture à quatre champs hybride- 3 -

Lois de fermeture admissibles pour les termes sources $\phi_k(W)$:

$$\phi_l(W) = g_{ll}(W)(P_l - (P_v + P_g)) + g_{ls}(W)(P_s - (P_v + P_g));$$

$$\phi_s(W) = g_{sl}(W)(P_l - (P_v + P_g)) + g_{ss}(W)(P_s - (P_v + P_g));$$

$$\phi_v(W) = -(\phi_s(W) + \phi_l(W));$$

$$\phi_g(W) = \phi_v(W)$$

avec g_{ij} MSDP.

On déduit de la meme manière les termes sources admissibles pour $\psi_{kl}(W)$ et $I_{kl}(W)$.

Lois de fermeture à quatre champs hybride- 4 -

On recherche toujours une structure LD pour le champ associé à $\lambda = V_\Sigma$.

Les vitesses d'interface suivantes sont admissibles :

$$V_\Sigma = U_k \quad (k = s, l, v, g)$$

$$V_\Sigma = \frac{\sum_{k=s,l,v,g} m_k U_k}{\sum_{k=s,l,v,g} m_k}$$

Lois de fermeture à quatre champs hybride- 4 -

On recherche toujours une structure LD pour le champ associé à $\lambda = V_\Sigma$.

Les vitesses d'interface suivantes sont admissibles :

$$V_\Sigma = U_k \quad (k = s, l, v, g)$$

$$V_\Sigma = \frac{\sum_{k=s,l,v,g} m_k U_k}{\sum_{k=s,l,v,g} m_k}$$

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand** V_Σ **est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand V_Σ est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand** V_Σ **est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand V_Σ est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand V_Σ est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand** V_Σ **est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand V_Σ est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Propriètés du modèle (s,l,v,g)

Synthèse: Pour ce modèle à quatre champs:

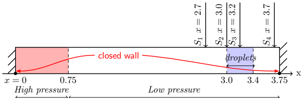
- On dispose d' une inégalité d'entropie pour les solutions régulières ;
- Le système homogène est hyperbolique ;
- Les relations de saut champ par champ sont uniques **quand V_Σ est choisi parmi les fermetures ci-dessus** ;
- On peut paramétriser l'onde de couplage associée à la vap $\lambda = V_\Sigma$;
- Le modèle renvoie à léquilibre en vitesse, température, et pression, avec un caractère potentiellement non monotone, et un possible effet de seuil en pression sur les CI (pour des écarts entre phases immenses) ([P26]);
- On retrouve de manière sous-jacente la loi de Dalton via les termes de relaxation en pression ([P24,P26]);
- Le modèle permet de retrouver des solutions stationnaires admissibles triviales (RIP) ;
- Le système est symétrisable (en dimension $d > 1$).

Synthèse : modèles - schémas- V & V

Synthèse des développements à ce jour:

- Modèles diphasiques eau liquide/vapeur:
  - Modèles [P1,P2,P15,P20]
  - Schémas et $V\&V$ [P11,P12,P14,P17,P18,P19,P22]
- Modèles triphasiques metal, eau liquide/vapeur:
  - Modèles [P4,P5,P21],
  - Schémas et $V\&V$ [P25,P28] ;
- Extension au cadre granulaire [P7,P10] ;
- Modèles hybrides misc./immisc. à trois ou quatre champs:
  - Modèles [P24,P26,P27],
  - Schémas et $V\&V$: tout doux.
- Extension au cadre des milieux encombrés par approche "poreuse" classique ([P6,P8,P9]) ou par formulation intégrale (tout doux).

Ex.: impact d'onde de choc sur lit de gouttes // exp. de Chauvin et al



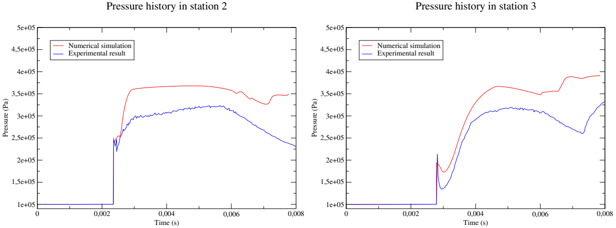


Figure: Profil temporel de la pression totale $\mathcal{P}$ pour les stations 2 et 3.

Travaux en cours

Quelques points durs et travaux en cours:

- **Modèles:**
  - Echelles de temps de relaxation;
  - Equation d'aire interfaciale ;
  - Thermodynamique;
- **Schémas et vérification:**
  - Précision des schémas de convection;
  - Stabilité (effets de relaxation $P/T/\mu$);
  - Algorithmes couplés convection/sources;
- Autres points:
  - Evaluation des incertitudes ;

Publications, Rapports et Communications

P1- Closure laws for two-fluid two-pressure model, F. Coquel, T. Gallouët, J.M. H., N.Seguin, C.R. Acad. Sci. Paris, vol.I-334, 2002.
P2- Numerical modelling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach, T. Gallouët, J.M. H., N.Seguin, M3AS, vol.14, 2004.
P3- A simple method to compute standard two-fluid models, J.M. H., O. Hurisse, Int. J. Comp. Fluid Dyn., vol.19(7), 2005.
P4- An hyperbolic three-phase flow model, J.M. H., C.R. Acad. Sci. Paris, vol.I-342, 2006.
P5- A three-phase flow model, J.M. H., Math. Comp. Model., vol.45,2007.
P6- Un modèle hyperbolique diphasique bifluide en milieu poreux, J.M. H., C.R. Mecanique, vol.336, 2008.
P7- Hyperbolic relaxation model for granular flow, T. Gallouët, P. Helluy, J.M. H., J. Nussbaum, Math Mod. Num. Anal., vol.44, 2010.
P8- A two-fluid hyperbolic model in a porous medium, L. Girault, J.M. H., Math Mod. Num. Anal., vol.44, 2010.
P9- Multidimensional computations of a two-fluid hyperbolic model in a porous medium, L. Girault, J.M. H., I.J.F.V. vol. 7(1), 2010.
P10- Multidimensional two-phase flow modelling applied to interior balistics, J. Nussbaum, P. Helluy, J.M. H., B. Baschung, J.Appl. Mech. 2011
P11- A fractional step method to compute a class of compressible gas-liquid flows, J.M. H., O. Hurisse, Computers and Fluids, vol.55, 2012.
P12- Approximate solutions of the Baer-Nunziato model, F. Crouzet, F. Daude, P. Galon, P. Helluy, J.M. H., O. Hurisse, Y. Liu, ESAIM Proceedings, vol.40, 2013.
P13- Modelling compressible multiphase flows, F. Coquel, T. Gallouet, P. Helluy, J.M. H., O. Hurisse, N. Seguin, ESAIM Proceedings,2013
P14- A robust entropy-satisfying Finite VOlume scheme for the isentropic Baer-Nunziato model, F. Coquel, J.M. H., K. Saleh, N. Seguin, Math Mod. Num. Anal., vol. 48, 2014.
P15- Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows, F. Coquel, J.M. H., K. Saleh, N. Seguin, Communications in Mathematical Sciences, vol.12, 2014.
P17- Validation of a two-fluid model on unsteady liquid-vapor water flows, F. Crouzet, F. Daude, P. Galon, J.M. H., O. Hurisse, Y. Liu, Computers and Fluids,vol. 119, 2015.
P18- A HLLC-type Riemann solver with approximate two-phase contact for the computation of the Baer-Nunziato two fluid model, H. Lochon, F. Daude, P. Galon, J.M. H., J. of Comp. Phys., vol. 326, 2016.
P19- Comparison of two-fluid models on steam-water transients, H. Lochon, F. Daude, P. Galon, J.M. H., Math Mod. Num. Anal., 2016.
P20- A simple turbulent two-fluid model, J.M. H., H. Lochon, Comptes Rendus Mécanique, vol. xx, 2016.
P21- A class of multiphase flow models, J.M. H., Comptes Rendus Mathématique, vol. 354, 2016.
P22- A positive and entropy satisfying Finite Volume scheme for the Baer-Nunziato model, F. Coquel, J.M. H., K. Saleh, J. of Comp. Phys., vol. 330, 2017.
P23- Computation of fast depressurization of water: revisiting Bilicki modeling of mass transfer, H. Lochon, F. Daude, P. Galon, J.M. H., Computers and Fluids, vol. 156, pp. 162-174, 2017.
P24- A three-phase flow model with two miscible phases, J.M. H., H. Mathis Math Mod. Num. Anal., 2019.
P25- Relaxation and simulation of a barotropic three-phase flow model, H. Boukili, J.M. H., Math Mod. Num. Anal., 2019.
P26- A four-field three-phase flow model with both miscible and immiscible components, J.M. H., O. Hurisse, L. Quibel, Math Mod. Num. Anal., 2020

Collaborations:

- Frédéric Coquel (CNRS, X-CMAP),
  Thierry Gallouët (Aix-marseille Université,I2M),
  Sergey Gavrilyuk (Aix-marseille Université,IUSTI),
  Philippe Helluy (Université Strasbourg, IRMA),
  Olivier Hurisse (EDF),
  Hélène Mathis (Université Nantes, LJL),
  Khaled Saleh (Université Lyon, ICJ),
  Nicolas Seguin (Université Rennes);
- Hamza Boukili (PhD thesis, CIFRE EDF-I2M, MFEE, end 2016-2019),
  David Iampietro (PhD thesis, CIFRE EDF-I2M, ERMES, 2015-2018),
  Charles Demay (PhD thesis, CIFRE EDF-LAMA, MFEE, 2014-2017),
  Hippolyte Lochon (PhD thesis, CIFRE EDF-I2M, AMA, 2013-2016),
  Sophie Dallet (PhD thesis, CIFRE EDF-I2M, MFEE, 2013-2016),
  Yujie Liu (PhD thesis, CIFRE EDF-LATP, AMA, 2010-2013),
  Khaled Saleh (PhD thesis, CIFRE EDF-LJLL, MFEE, 2009- 2012),
  Laetitia Girault (PhD thesis, CIFRE EDF-LATP, MFEE, 2007-2010),
  Vincent Guillemaud (PhD thesis, CEA-LATP, 2003-2006),
  Nicolas Seguin (PhD thesis, EDF-LATP, MFTT, 1999-2002);